IA : TAMBA — Prof : M. DRAME

Lycée : Koumpentoum — Classe : $1^{ere}S_2$

Année : 2020-2021 — Chapitre : Etude de fonction

SERIE D'EXERCICES

EXERCICE 1

Soit $f(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$

1) Déterminer les réels a et b tes que Cf passe par le point $A(0;3)$ et admet en ce point une tangente d'équation y = 4x+3.
2) Etudier f et tracer Cf .

EXERCICE 2

On considère la fonction f définie par

$f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}$

1) Déterminer les réels a et b tels que Cf passe par le point $A(0,1)$ et admette en ce point une tangente horizontale.
2) On suppose $a=1, b=-1$
   a) Déterminer les limites aux bornes de Df .Préciser asymptotes éventuelles
   b) Déterminer les réels α, β et c tels que $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{c}{x-1}$. En déduire que la droite $(D): y=x+2$ est asymptote oblique à la courbe.
   c) Dresser le tableau de variations de f puis tracer la courbe
3) Soit $g(x)=\dfrac{x^2+x-1}{|x-1|}$ tracer Cg à l'aide de Cf .

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par :

$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

1) Déterminer les réels a, b, c et d tels que, pour tout réel $x \neq 1$, $f(x)=ax+b-\frac{cx+d}{(x-1)^2}$.

2) Déterminer l'abscisse du point J de la courbe(C_f) , où la tangente est parallèle à D, puis l'équation de cette tangente.

EXERCICE 4

A. Soit la fonction f définie par :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x^2+x-2|} & si\, x\le 1\\ \dfrac{x^2-3x+2}{x-3} & si\, x>1\end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la continuité en 1.
2) Etudier la dérivabilité en 1 et -2 puis interpréter les résultats.

B. Etudier la dérivabilité de f en 0.

a. $\begin{cases}f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x+1}}{x} & si\ x\neq 0\\ f(0)=-\frac{1}{2}\end{cases}$

b. $\begin{cases}f(x)=\frac{\tan x-\sin x}{x^2} & si\ x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$

EXERCICE 5

$$f(x)=\begin{cases}x+\sqrt{x^2+1} & si\ x\ge 0\\ \dfrac{x+1}{x^2+1} & si\ x<0\end{cases}$$

1) Df ? Continuité et dérivabilité en 0 ; interpréter les résultats.
2) Etudier les branches infinies en l'infini.
3) Dresser le tableau de variations puis tracer la courbe.

EXERCICE 6

$f(x)=\sqrt{|x^2-2x-3|}$

1) Déterminer Df .Justifier que f est continue sur IR
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue. Etudier la continuité et la dérivabilité en -1 et 3 puis interpréter graphiquement les résultats.
3) Etudier les branches infinies de Cf en l'infini
4) Tracer Cf

EXERCICE 7

Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}-x+\sqrt{x^2+4} & si\ x<0\\ \sqrt{|4-x^2|} & si\ x\ge 0\end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f
2) Ecrire f(x) sans valeur absolue
3) a) Etudier la continuité de f en 0
   b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
   c) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter.

4) Etudier les branches infinies en l'infini
5) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe.

EXERCICE 8

On considère la fonction

$$f \text{ définie par } f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x^2+x|} & si\ x<0\\ x+1-\dfrac{1}{x+1} & si\ x\geq 0\end{cases}$$

1) Justifier que f est définie sur IR
2) Ecrire la fonction sans le symbole de la valeur absolue.
3) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats
4) Etudier la dérivabilité de f en -1. Interpréter les résultats
5) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
6) Etudier les branches infinies de Cf en l'infini
7) Dresser le tableau de variations de f
8) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

EXERCICE 9

1. Soit la fonction g définie par g(x) = $2x-\sqrt{1+x^2}$.

a) Préciser son domaine de définition.

b) Etudier les variations de g, puis dresser son tableau de variation.

c) Montrer que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α qu'on déterminera.

d) Déduire le signe de g sur IR.

2. Soit la fonction f définie sur IR par

$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-x$; et (C) sa courbe représentative.

a) Monter que les droites (D) et (D') d'équations respectives y= -3x et y = x. sont des asymptotes à (C).

b) Précise la position de (C) par rapport aux droites (D) et (D').

c) Montre que pour tout réel x, $f(x)'=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$.

d) En déduire le tableau de variation de f.

e) Construire la courbe (C).

3. Soit h la restriction de f sur I= $]-\infty;\alpha[$.

a) Montrer que h est bijective de I vers un intervalle J à préciser.

b) Préciser le domaine de dérivabilité de h^{-1} puis dresser son tableau de variation.

c) Calculer h(0) puis déterminer $(h^{-1})'(2)$.

d) Représenter dans le même repère la courbe de h^{-1}.

EXERCICE 10

On se propose d'étudier la fonction f: IR → IR
$x\to\frac{x^2+|x-2|}{|x+1|}$.

1) Déterminer D_f. Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur chacun des intervalles de D_f et, en particulier au point $x=2$.
2) Etudier les limites de f aux bornes de D_f.
3) Etudier les variations de f.
4) Construire (g) dans un repère (O ;$\vec{\imath}$;$\vec{\jmath}$) Vous préciserez les asymptotes ainsi que la position de la courbe par rapport à ces asymptotes.

EXERCICE 11

Soit f la fonction donnée par : $f(x)=\frac{2sin2x}{1+cosx}$

1) Déterminer le domaine de définition de f puis montrer qu'on peut réduire le domaine d'étude de f a l'intervalle [0, π[.
2) Déterminer la limite de f en π.

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie sur R par
$f(x)=sin^2(x).\cos(2x)$.
1) Etudier la parité et la périodicité de f .En déduire qu'on peut réduire le domaine d'étude à [0 ; π].
2) Montrer que la droite Δ: $x=\frac{\pi}{2}$, est un axe de symétrie pour la courbe de f sur [0 ;π].

EXERCICE 13

Soit $f(x)=sinx-x$ et $g(x)=x-tanx$
1) Etudier et dresser les tableaux de variations des fonctions f et g sur $[-\pi$; π] .
2) Montrer que f et g sont bijectives de $]0;\frac{\pi}{2}[$ vers des intervalles J et K à préciser.
3) En déduire que pour $x\in]0;\frac{\pi}{2}[$, $sinx\leq x\leq tanx$.
4) Soit $h(x)=\frac{sinx}{x}$ calculer $f'(x)$, Déduire de la relation précédente que la fonction h est décroissante sur $]0;\frac{\pi}{2}[$.

Bon courage